

Cuprins

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Elemente de Analiză clasică | 11 |
| 1.1. | Calculul diferențial | 11 |
| 1.1.1. | Funcții de o singură variabilă | 12 |
| 1.1.2. | Funcții de mai multe variabile | 16 |
| 1.1.3. | Serii Taylor | 22 |
| 1.2. | Calculul integral | 25 |
| 1.2.1. | Integrala Riemann | 25 |
| 1.2.2. | Integrala dublă | 28 |
| 1.3. | Transformări funcționale | 31 |
| 1.3.1. | Transformata Laplace | 32 |
| 1.3.2. | Transformata Fourier | 42 |
| 1.3.3. | Convoluții | 48 |
| 1.4. | Exemple, exerciții propuse | 50 |
| 2 | Măsură și probabilitate | 73 |
| 2.1. | Spații măsurabile și măsuri | 73 |
| 2.1.1. | Spații și funcții măsurabile | 73 |
| 2.1.2. | Corpul borelian produs | 77 |
| 2.1.3. | Măsura | 78 |
| 2.1.4. | Integrala Lebesgue | 81 |
| 2.1.5. | Teorema Radon-Nikodym | 83 |
| 2.1.6. | Teorema lui Fubini | 84 |
| 2.2. | Teoria probabilităților. Generalități | 86 |

| | |
|---|------------|
| 2.3. Variabile aleatoare | 87 |
| 2.3.1. Definiția variabilei aleatoare | 88 |
| 2.3.2. σ -algebra generată de o variabilă aleatoare | 90 |
| 2.3.3. Repartiții. Funcții de repartiție | 91 |
| 2.3.4. Cuantilele unei variabile aleatoare | 95 |
| 2.3.5. Funcții de variabile aleatoare | 96 |
| 2.3.6. Independența variabilelor aleatoare | 98 |
| 2.3.7. Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare | 98 |
| 2.3.8. Convergența șirurilor de variabile aleatoare | 110 |
| 2.3.9. Funcția generatoare de momente | 114 |
| 2.3.10. Funcția caracteristică | 116 |
| 2.4. Media condiționată | 126 |
| 2.5. Probabilități echivalente | 133 |
| 2.6. Exemple, exerciții propuse | 136 |
| 3 Procese stocastice | 155 |
| 3.1. Procese Markov | 160 |
| 3.2. Martingale | 165 |
| 3.3. Mișcarea browniană | 167 |
| 3.3.1. Definiție, proprietăți generale | 169 |
| 3.3.2. Mișcarea browniană generalizată | 172 |
| 3.3.3. Martingale asociate mișcării browniene | 174 |
| 3.4. Integrala stocastică | 175 |
| 3.4.1. Integrala stocastică Itô | 175 |
| 3.4.2. Integrala stocastică Stratonovich | 182 |
| 3.5. Procese Itô. Formula lui Itô | 185 |
| 3.5.1. Covariația pătratică | 188 |
| 3.5.2. Formula Leibniz-Newton pentru integrala Stratonovich | 192 |
| 3.6. Schimbarea de probabilitate | 193 |
| 3.6.1. Introducere, generalități | 193 |
| 3.6.2. Teorema Girsanov | 195 |
| 3.6.3. Necesitatea teoremei în evaluarea activelor financiare | 197 |

| | |
|--|------------|
| 3.7. Exemple, exerciții propuse | 201 |
| 4 Ecuatii diferențiale și cu derivate parțiale | 229 |
| 4.1. Ecuatii diferențiale ordinare | 229 |
| 4.1.1. Ecuatii cu variabile separabile | 230 |
| 4.1.2. Ecuatii diferențiale liniare de ordinul întâi | 231 |
| 4.1.3. Ecuatii diferențiale afine de ordinul întâi | 231 |
| 4.1.4. Ecuatii diferențiale de tip Bernoulli | 233 |
| 4.1.5. Ecuatii diferențiale de tip Riccati | 234 |
| 4.1.6. Ecuatii diferențiale liniare de ordinul n | 235 |
| 4.1.7. Exemple, exerciții propuse | 237 |
| 4.2. Ecuatii diferențiale stocastice | 239 |
| 4.2.1. Context general | 239 |
| 4.2.2. Ecuatii diferențiale stocastice afine | 240 |
| 4.2.3. Soluția generală a ecuației afine | 242 |
| 4.2.4. O altă metodă de rezolvare a EDS | 244 |
| 4.2.5. Un caz particular: exponențiala stocastică | 245 |
| 4.2.6. Rezolvarea ecuațiilor stocastice Itô folosind calculul stocastic Stratonovich | 249 |
| 4.2.7. Exemple, exerciții propuse | 254 |
| 4.3. Ecuatii cu derivate parțiale | 283 |
| 4.3.1. Rezolvarea ecuației căldurii | 284 |
| 4.3.2. Teorema de reprezentare Feynman-Kač | 289 |
| 4.3.2. Exemple, exerciții propuse | 292 |
| 5 Evaluarea activelor financiare în metodologia Black-Scholes | 311 |
| 5.1. Opțiunile și proprietățile acestora | 311 |
| 5.1.1. Definiții | 311 |
| 5.1.2. Evaluarea opțiunilor și arbitrajul | 317 |
| 5.1.3. Paritatea <i>call-put</i> pentru opțiunile europene | 320 |
| 5.1.4. Limita superioară și inferioară a prețului unei opțiuni | 321 |
| 5.1.5. Factori care determină valoarea unei opțiuni | 325 |
| 5.2. Evaluarea derivativelor europene | 325 |

| | |
|---|------------|
| 5.2.1. Dinamica prețurilor în metodologia Black-Scholes | 326 |
| 5.2.2. Ecuația de evaluare | 327 |
| 5.2.3. O metodă alternativă de evaluare | 331 |
| 5.3. Modelul Black-Scholes | 333 |
| 5.3.1. Formula de evaluare | 333 |
| 5.3.2. Portofolii auto-finanțate | 340 |
| 5.3.3. Sensitivitatea prețului | 343 |
| 5.3.4. Evaluarea obligațiunilor corporatiste: modelul Merton . . . | 349 |
| 5.3.5. Cazul parametrilor variabili în timp | 354 |
| 5.4. Volatilitate locală | 356 |
| 5.5. Exemple, exerciții propuse | 360 |
| 6 Model de evaluare cu proces de difuzie cu salturi | 401 |
| 6.1. Procese Poisson. Formula lui Itô pentru procese cu salturi | 402 |
| 6.1.1. Procesul Poisson | 402 |
| 6.1.2. Calcul stocastic asociat proceselor Poisson | 407 |
| 6.1.3. Procese Poisson neomogene | 411 |
| 6.1.4. Procese Poisson compuse | 412 |
| 6.1.5. Integrale stocastice în raport cu procese Poisson | 414 |
| 6.1.6. Lema lui Itô pentru procese cu salturi | 416 |
| 6.1.7. Schimbarea de probabilitate | 421 |
| 6.1.8. Ecuații diferențiale stocastice pentru procese cu salturi . . | 429 |
| 6.2. Modelul Merton pentru procese cu salturi | 431 |
| 6.2.1. Calculul speranței matematice | 433 |
| 6.2.2. Evaluarea derivativelor pentru procese cu salturi | 435 |
| 6.2.3. Teorema Feynman-Kač pentru difuzii cu salturi | 438 |
| 6.2.4. Formula Merton pentru opțiunea <i>call</i> europeană | 439 |
| 6.3. Exemple, exerciții propuse | 440 |
| 7 Calcul stocastic multidimensional cu aplicații | 453 |
| 7.1. Vectori aleatori bidimensionali | 453 |
| 7.1.1. Dependența a două variabile aleatoare | 453 |
| 7.1.2. Distribuții condiționate și medii condiționate | 459 |

| | |
|--|------------|
| 7.1.3. Funcții de vectori aleatori bidimensionali | 460 |
| 7.1.4. Suma variabilelor aleatoare | 462 |
| 7.1.5. Distribuția normală multivariată | 463 |
| 7.1.6. Exemple, exerciții propuse | 468 |
| 7.2. Calcul stocastic vectorial | 474 |
| 7.2.1. Mișcarea browniană n -dimensională | 474 |
| 7.2.2. Formula lui Itô pentru procese vectoriale | 476 |
| 7.2.3. Schimbarea de probabilitate | 481 |
| 7.2.4. Sisteme de ecuații diferențiale stocastice | 482 |
| 7.2.5. Teorema de reprezentare Feynman-Kač | 490 |
| 7.2.6. Metodologia Black-Scholes în cazul a n active | 490 |
| 7.2.7. Exemple, exerciții propuse | 493 |
| 7.3. Procese Bessel | 518 |
| 7.3.1. Ecuația lui Bessel. Funcții Bessel | 519 |
| 7.3.2. Context general | 520 |
| 7.3.3. Definiția generală | 523 |
| 7.3.4. Absolut continuitatea | 525 |
| 7.3.5. Proprietăți ale proceselor Bessel | 530 |
| 7.3.6. Procesul Ornstein-Uhlenbeck-pătrat radial | 533 |
| 7.3.7. Procesul Cox-Ingersoll-Ross | 534 |
| 7.3.8. Procesul cu elasticitate constantă a varianței | 536 |
| 7.3.9. Exemple, exerciții propuse | 541 |
| 7.4. Volatilitate stocastică | 552 |
| 7.4.1. Modelul Heston | 554 |
| 7.4.2. Schimbarea numerarului | 562 |
| 7.4.3. Modelul Heston ca proces bivariat | 571 |
| 7.4.4. Exemple, exerciții propuse | 574 |
| 8 Evaluarea instrumentelor financiare cu venit fix | 593 |
| 8.1. Modelarea dinamicii ratei de dobândă | 595 |
| 8.1.1. Modele cu revenire la medie | 595 |
| 8.1.2. Modele cu elasticitate constantă a varianței | 596 |

| | |
|---|-----|
| 8.1.3. Modele affine | 597 |
| 8.2. Obligațiuni zero-cupon | 598 |
| 8.2.1. Ecuația de evaluare a unei obligațiuni zero-cupon | 598 |
| 8.2.2. Teoria martingalelor în modelele pe termen scurt | 600 |
| 8.3. Ratele <i>forward</i> | 602 |
| 8.4. Modelul Heath-Jarrow-Morton | 604 |
| 8.4.1. Generalități | 604 |
| 8.4.2. Universul neutru la risc | 607 |
| 8.4.3. Evaluarea instrumentelor financiare pe rata dobânzii | 611 |
| 8.5. Modele gaussiene în evaluarea opțiunilor pe obligațiuni | 616 |
| 8.5.1. Prețurile <i>forward</i> | 618 |
| 8.5.2. Măsura <i>forward</i> neutră | 619 |
| 8.5.3. Evaluarea opțiunilor <i>call</i> , de tip european, pe obligațiuni zero-cupon | 621 |
| 8.6. Exemple, exerciții propuse | 623 |